Ejercicio. Sea C un conjunto no vac'io, cerrado y convexo en un espacio de Hilbert $\mathcal{H}$. Prueba que la proyecci'on sobre C, $P_C : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ verifica que $\|P_C(x) - P_C(y)\| \leqslant \|x - y\|$ para todos $x, y \in \mathcal{H}$.

Solución. En virtud de la conocida caracterización de la proyección P_C se verifica que

$$\operatorname{Re}\left\langle x - P_C(x) \middle| P_C(y) - P_C(x) \right\rangle \leqslant 0; \quad \operatorname{Re}\left\langle P_C(y) - y \middle| P_C(y) - P_C(x) \right\rangle \leqslant 0$$

Sumando estas dos desigualdades obtenemos

$$\operatorname{Re}\left\langle x - y + P_C(y) - P_C(x) \middle| P_C(y) - P_C(x) \right\rangle = \operatorname{Re}\left\langle x - y \middle| P_C(y) - P_C(x) \right\rangle + \|P_C(y) - P_C(x)\|^2 \leqslant 0$$

de donde deducimos que

$$\|P_C(y) - P_C(x)\|^2 \leqslant -\operatorname{Re}\left\langle x - y \middle| P_C(y) - P_C(x) \right\rangle \leqslant \left|\left\langle x - y \middle| P_C(y) - P_C(x) \right\rangle\right| \leqslant \|x - y\| \|P_C(y) - P_C(x)\|$$

Donde hemos usado la desigualdad de Cauchy-Schwarz. Concluimos que $\|P_C(y) - P_C(x)\| \leqslant \|x - y\|$.